Beliebige Symmetrie von Funktionen

Bei ganzrationalen Funktionen kann man leicht ablesen, ob sie achsensymmetrisch zur y-Achse sind, punktsymmetrisch zum Ursprung sind oder ob keine Symmetrie erkennbar ist. Dennoch können auch solche Funktionen symmetrisch sein, wie folgende Beispiele zeigen:

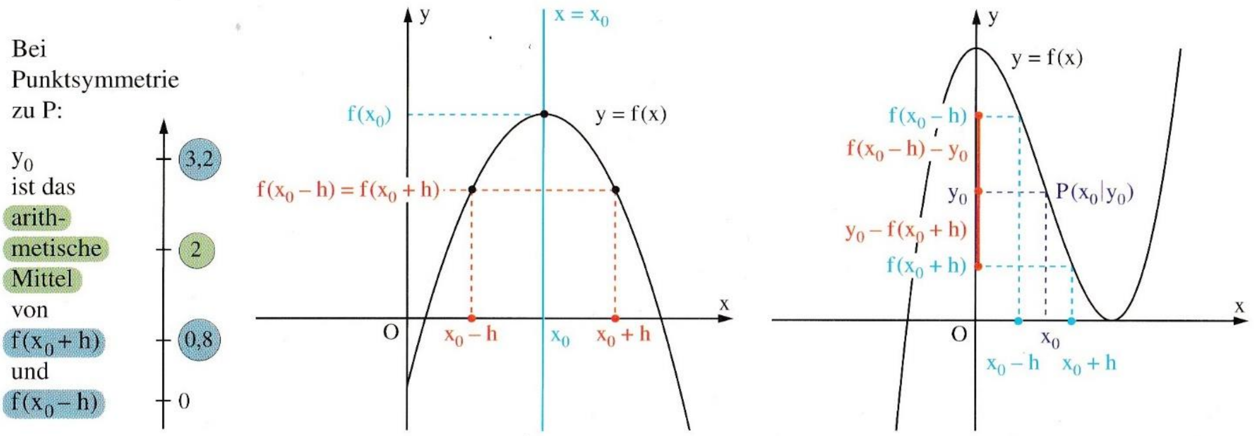

Fig. 1

Für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $x_0 + h \in D$ gilt:
$f(x_0 - h) = f(x_0 + h)$.

Der Graph von f ist **achsensymmetrisch zur Geraden $x = x_0$.**

Fig. 2

Für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $x_0 + h \in D$ gilt:
$f(x_0 - h) - y_0 = y_0 - f(x_0 + h)$
bzw. $y_0 = \frac{1}{2}[f(x_0 - h) + f(x_0 + h)]$.

Der Graph von f ist **punktsymmetrisch zum Punkt $P(x_0|y_0)$.**

Beispiel: Zeige, dass die Funktion: $f(x) = x^2 - 4x + 5$ zur Geraden $x_0 = 2$ achsensymmetrisch ist.

Es muss gelten: $f(2 + h) = f(2 - h)$

$f(2 + h)^2 = (2 + h)^2 - 4(2 + h) + 5 = 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5 = (h^2 - 4h + 4) + (-8 + 4h) + 5 =$

$(2 - h)^2 - 4(2 - h) + 5 = f(2 - h)$

⇨ Die Funktion ist achsensymmmetrisch zur Geraden h = 2

Zeige, dass die Funktion: $f(x) = x^3 - 3x^2$ zum Punkt P(1|-2) punktsymmetrisch ist.

Es muss gelten: $\frac{1}{2}\,[\,f(x_0 - h) + f(x_0 + h)] = \ y_0$

In diesem Beispiel gilt: $x_0 = 1$ und $y_0 = -2$

Eingesetzt: : $\frac{1}{2}\,[\,f(1 - h) + f(1 + h)] = \frac{1}{2}\,[(1-h)^3 - 3(\,1 - h)^2 + (1 + h)^3 - 3(1 + h)^2] =$

$= \frac{1}{2}\,[h^3 - 3h - 2 - (\,h^3 - 3h + 2)] = \ -2$

Also ist der Graph punktsymmetrisch zum Punkt P(1|-2)

Zeige, dass die Funktion $f(x) = 2x^2 + 12x + 19$ achsensymmetrisch zur Symmetriachse x = -3 ist.	Zeige, dass die Funktion $g(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 15$ punktsymmetrisch zu P(2|1) ist.